MAI 1 – příklady pro 2. a 3. cvičení

Limita posloupnosti.

Definice limity posloupnosti**:**

1. Dokažte z definice, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$.
2. Dokažte, že platí: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$.
3. Ukažte, že platí:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ pro $q\in(-1,1)$ a $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=+\infty$ pro $q\in(1,\infty)$, pro $q\le -1$ posloupnost $\{q^n\}$ limitu nemá;
   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ pro $a\in(0,\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.
4. Dokažte, že platí: má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu *a*, má každá vybraná posloupnost tutéž limitu.
5. Ukažte, že posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$, $n\in N$, nemá limitu.
6. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení (a dokažte, že platí nebo opravte tak, aby tvrzení platilo) :
   a) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$;
   b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=a$ a $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=a \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.
   c) nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti a nechť $\exists n_0\in N\,\forall n>n_0: a_n<b_n$, pak $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;
   d) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n \quad\Rightarrow\quad \exists n_0\in N\,\forall n>n_0: a_n<b_n$.
7. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ a $b_n=(-1)^n a_n$. Vyšetřete existenci $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ (užijte 4.) .
8. Dokažte následující tvrzení:
   a) posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní $\Rightarrow$ posloupnost $\{a_n\}$ je omezená;
   b) posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní $\Rightarrow$ posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská;
   c) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n.b_n=0$.

Výpočet limity posloupnosti:

1. Vypočítejte limity:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{2n^2-n+5}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+n-14}{2n^2-n+5}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^3-3n+1}$,
   $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-2^{-n}}{2^n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{4^n+3^{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+n!}{-2^n+3\cdot n!}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+n!}{-2^n+3\cdot n!}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+(-1)^n n!}{-2^n+3\cdot n!}$,
   $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n-2n!}{n^4+3n^n}$,
   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2+1}-n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}-(-1)^n n^2}{3n^2+\sqrt[3]{n^2}}$
   $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$.

2. Ukažte, že platí: $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \Leftrightarrow q\in(-1,1)$.

3. Ukažte, že platí: $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \in R \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. Vyšetřete existenci limity ($n\in N$) (lze užít tvrzení v 4. z první části úloh) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3n^2+n}$.

5. Dokažte větu o limitě sevřené posloupnosti. Modifikujte tuto větu i pro nevlastní limity.

6. Pomocí vět v příkladu 5. dokažte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n = 0$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx = 0$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sin n)=\infty$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} n(3+\sin n)=\infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

7. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\dots\dots\dots+\frac{1}{n^2+n}\right)$.

8. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\dots\dots\frac{1}{n+\sqrt{n-1}}+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$